

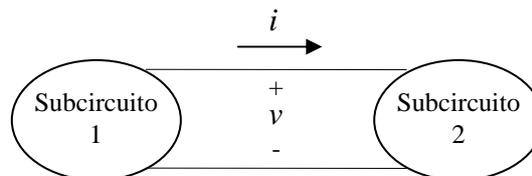
# Conceptos Básicos Previos

## Circuitos Eléctricos

Régimen permanente y transitorio.

Se alcanza la condición de régimen permanente cuando las formas de onda se repiten de forma periódica con un periodo T que depende de la naturaleza del circuito.

Magnitudes medias y eficaces.



**Figura 1**

Potencia instantánea:

$$p(t) = vi \quad (1.1)$$

Potencia media:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T vi \cdot dt \quad (1.2)$$

Carga resistiva: ( $v = Ri$ )

$$P = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt \quad (1.3)$$

Corriente rms: (root-mean-square)

$$P = RI^2 \quad (1.4)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt} \quad (1.5)$$

Con estas definiciones, la tensión y la intensidad instantáneas en régimen permanente senoidal se pueden escribir como:

$$v = \sqrt{2} \cdot V \cos \omega t \quad i = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t - \phi) \quad (1.6)$$

donde  $V$  e  $I$  son los valores rms de la tensión de la intensidad respectivamente.

### Representación Fasorial de Magnitudes Eléctricas.

Cuando  $v$  e  $i$  son sinusoidales con el tiempo y tienen la misma frecuencia, se pueden representar en el plano complejo mediante la proyección de fasores sobre el eje de abscisas.

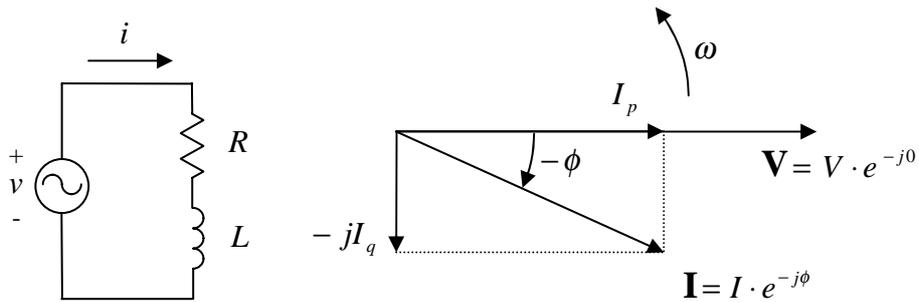
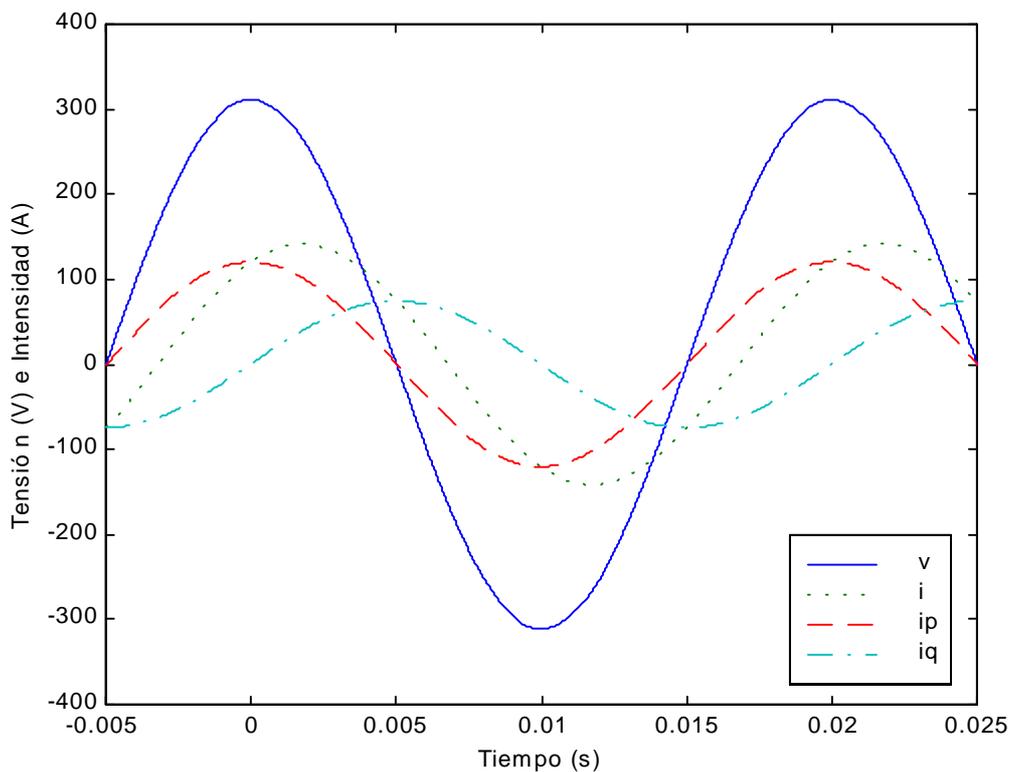


Figura 2

Estos fasores giran en sentido antihorario con una velocidad angular  $\omega$ , y se utilizan los valores rms para representar su magnitud:

$$\mathbf{V} = V \cdot e^{-j0}, \quad \mathbf{I} = I \cdot e^{-j\phi} \quad (1.7)$$



**Figura 3**

**Comportamiento Capacitivo e Inductivo de una Carga.**

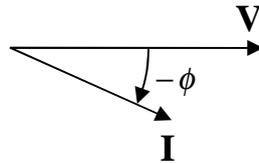
Al cociente entre **V** e **I** se le denomina impedancia compleja **Z**.

Para una carga inductiva:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L = Z \cdot e^{j\phi} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V \cdot e^{j0}}{Z \cdot e^{j\phi}} = I \cdot e^{-j\phi} \quad (1.9)$$

donde  $I = V/Z$ .



**Figura 4**

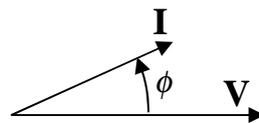
La intensidad se ve retrasada con respecto a la tensión ante carga inductiva.

Para una carga capacitiva:

$$\mathbf{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} = Z \cdot e^{-j\phi} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V \cdot e^{j0}}{Z \cdot e^{-j\phi}} = I \cdot e^{j\phi} \quad (1.11)$$

donde  $I = V/Z$ .



**Figura 5**

La intensidad se ve adelantada con respecto a la tensión ante carga capacitiva.

**Potencia Aparente, Activa y Reactiva. Factor de Potencia.**

La potencia aparente o potencia compleja se define como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = V \cdot e^{j0} \cdot I \cdot e^{j\phi} = VI \cdot e^{j\phi} = S \cdot e^{j\phi} \quad (1.12)$$

donde  $S = VI$ , que se mide en VA (voltio-amperio).

La potencia activa  $P$  (o potencia media) se define como la parte real de la potencia aparente:

$$P = \text{Re}[\mathbf{S}] = VI \cdot \cos \phi \quad (1.13)$$

que se mide en W (vatio).

Se deduce de esta expresión que la potencia activa es debida a la componente  $I_p = I \cos \phi$ , que es la componente de la intensidad que está en fase con la tensión. Tan solo esta componente es la responsable de la transferencia de potencia.

Asimismo, la potencia reactiva  $Q$  se define como la parte imaginaria de la potencia aparente:

$$Q = \text{Im}[\mathbf{S}] = VI \cdot \sin \phi \quad (1.14)$$

que se mide en VAR (voltio-amperio-reactivo). La potencia reactiva, es por tanto, debida a la componente  $I_q = I \sin \phi$ .

De esta expresión se deduce que una carga inductiva ( $\phi$  positivo) produce un valor positivo de  $Q$ . Se dice entonces que la carga inductiva consume potencia reactiva. Del mismo modo, una carga capacitiva genera potencia reactiva.

Con estas dos definiciones la potencia aparente se suele representar como  $\mathbf{S} = P + jQ$ .

Por último, se define el factor de potencia como:

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{VI} = \cos \phi \quad (1.15)$$

El factor de potencia es una medida de lo efectiva que es la transferencia de potencia activa.

### Circuitos Eléctricos Trifásicos. Magnitudes de Fase y de Línea.

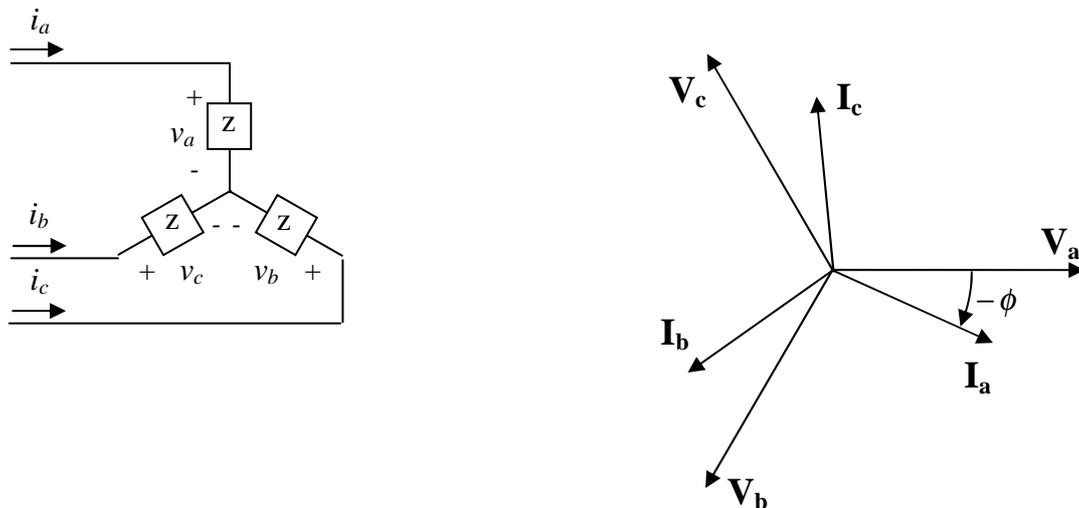


Figura 6

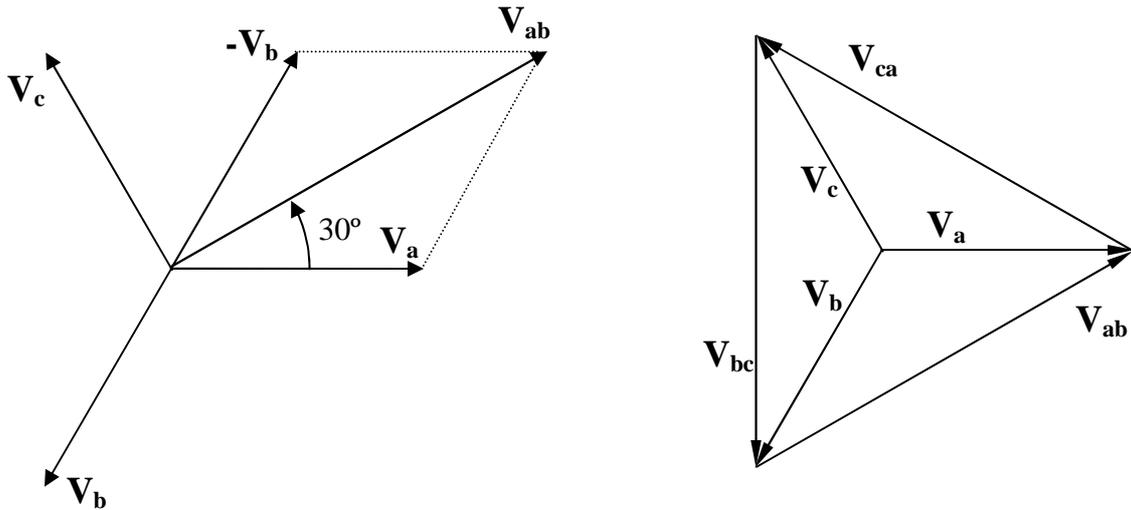
En la carga de la figura (carga equilibrada con tensiones equilibradas) las intensidades pueden relacionarse entre sí:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}} = \frac{V \cdot e^{j0}}{Z \cdot e^{j\phi}} = \frac{V}{Z} e^{-j\phi} = I \cdot e^{-j\phi} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \cdot e^{-j2\pi/3} = I \cdot e^{-j(\phi+2\pi/3)} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \cdot e^{j2\pi/3} = I \cdot e^{-j(\phi-2\pi/3)} \quad (1.18)$$

Se denomina  $v_{ab} = v_a - v_b$  a la tensión de línea (tensión entre las fases a y b). Análogamente se definen  $v_{bc} = v_b - v_c$  y  $v_{ca} = v_c - v_a$ . En un sistema trifásico equilibrado las tensiones de línea tienen el mismo módulo y están desfasadas entre sí  $120^\circ$ .



**Figura 7**

Se puede observar en la figura que la tensión de línea  $v_{ab}$  adelanta  $30^\circ$  a la tensión de fase  $v_a$ . Además la tensión de línea tiene un módulo  $\sqrt{3}$  veces superior al módulo de la tensión de fase:

La relación entre tensiones de línea y fase en módulo es:

$$V_{línea} = \sqrt{3} \cdot V \quad (1.19)$$

Los fasores de línea y de fase se relacionan de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{V}_a \cdot e^{j\pi/6} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{V}_b \cdot e^{j\pi/6} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{V}_c \cdot e^{j\pi/6} \quad (1.22)$$

Potencia media por fase:

$$S_f = VI \quad P_f = VI \cos \phi \quad (1.23)$$

Potencia media trifásica:

$$S = 3 \cdot S_f = 3 \cdot VI = \sqrt{3} \cdot V_{línea} \cdot I_{línea} \quad (1.24)$$

$$P = 3 \cdot P_f = 3 \cdot VI \cos \phi = \sqrt{3} \cdot V_{línea} \cdot I_{línea} \cos \phi \quad (1.25)$$

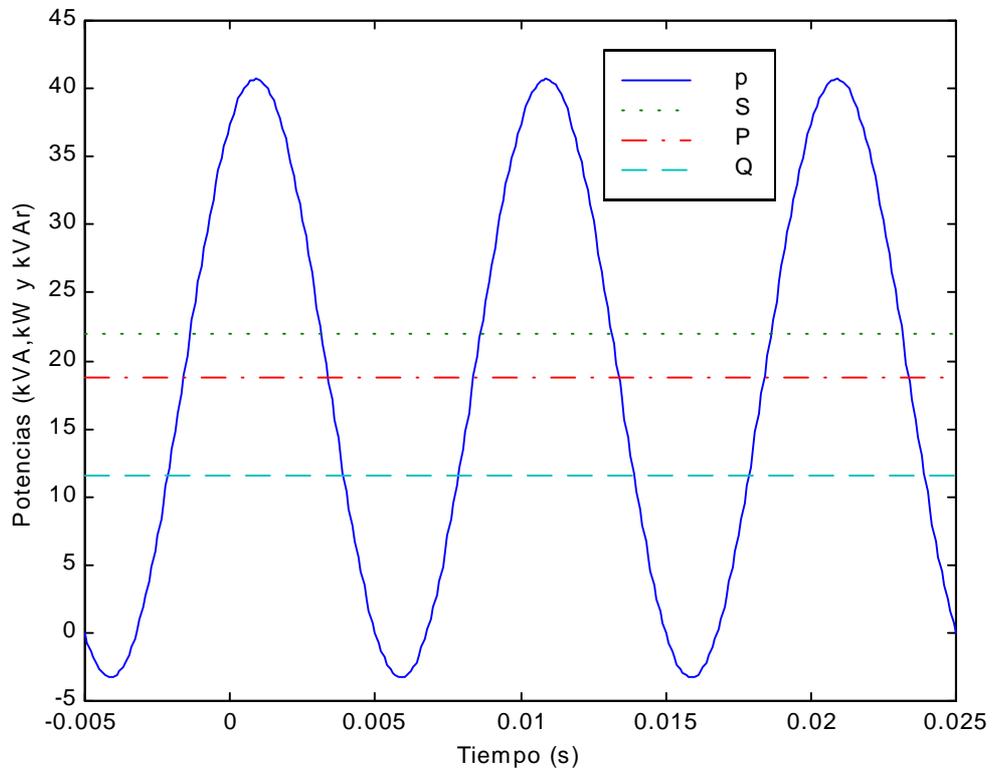


Figura 8

## Análisis de Fourier. Concepto de Distorsión Armónica. THD.

En general, toda función periódica puede ser descompuesta en una suma de senos y cosenos denominada desarrollo en serie de Fourier de la función:

$$i(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (1.26)$$

donde:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.27)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) \cos(k\omega_0 t) \cdot dt \quad k = 0,1,2,3... \quad (1.28)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) \sin(k\omega_0 t) \cdot dt \quad k = 0,1,2,3... \quad (1.29)$$

El término  $\frac{A_0}{2}$  es el valor medio de la función. Al término  $A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)$  se le denomina armónico de orden k. Al armónico de orden 1 se le denomina también componente fundamental.

El módulo del armónico de orden k viene dado por:  $I_{kp} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$

Y su valor eficaz es:  $I_k = \frac{I_{kp}}{\sqrt{2}}$

Empleando esta nomenclatura, el desarrollo en serie de Fourier se puede describir como:

$$i(t) = I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot I_k \cdot \sin(k\omega_0 t - \phi_k) \quad (1.30)$$

En determinados casos el desarrollo en serie de Fourier se puede simplificar:

- para el caso en que la función sea par,  $f(t) = f(-t)$ , los términos en seno desaparecen, es decir,  $B_k=0$ .
- para el caso en que la función sea impar,  $f(t) = -f(-t)$ , los términos en coseno desaparecen,  $A_k=0$ .
- para el caso en que la función sea alternada,  $f(t) = -f(t+T/2)$ , los armónicos de orden par desaparecen, por tanto,  $A_{2k} = B_{2k} = 0$ .

El valor eficaz de la señal vendrá dado por:

$$I = \sqrt{I_m^2 + \frac{(A_1^2 + B_1^2)}{2} + \frac{(A_2^2 + B_2^2)}{2} + \dots} = \sqrt{I_m^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \quad (1.31)$$

Se define la distorsión del armónico k como la relación entre el valor eficaz del armónico k y el valor eficaz del armónico fundamental:

$$D_k = \frac{I_k}{I_1} \quad (1.32)$$

Por último se define la distorsión armónica total como:  $D_t = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1} = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + \dots}$

Al parámetro  $D_t$  también se le llama THD (Distorsión Armónica Total).

El valor eficaz de la señal se podrá expresar como:  $I = \sqrt{I_m^2 + I_1^2 \cdot (1 + D_t^2)}$

De la misma forma, se pueden definir magnitudes análogas para las tensiones. Sin embargo los armónicos en tensión no suelen ser significativos en el caso de la red eléctrica.

La potencia media considerando armónicos en la intensidad:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v i \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sqrt{2} \cdot V \sin(\omega_0 t) \cdot \left[ I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot I_k \cdot \sin(k\omega_0 t - \phi_k) \right] \right\} \cdot dt \quad (1.33)$$

Teniendo en cuenta que las integrales en un periodo de un seno, o de los productos de funciones trigonométricas de diferente frecuencia son nulas, quedará:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sqrt{2} \cdot V \sin(\omega_0 t) \cdot \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega_0 t - \phi_1) \right] \cdot dt = VI_1 \cos \phi_1 \quad (1.34)$$

donde  $\phi_1$  es el ángulo de desfase entre  $v(t)$  y el primer armónico de  $i(t)$ .

Se deduce de esta fórmula que los armónicos no contribuyen a la potencia media (o activa). El factor de potencia se define ahora como:

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{VI_1 \cos \phi_1}{VI} = \frac{I_1}{I} \cdot \cos \phi_1 = \frac{I_1}{I} \cdot DPF \quad (1.35)$$

donde  $DPF$  es el factor de potencia debido al desfase.

Para ondas cuyo valor medio sea cero:

$$PF = \frac{1}{\sqrt{1 + D_t^2}} \cdot DPF \quad (1.36)$$

es decir, la existencia de armónicos hace que disminuya el factor de potencia.

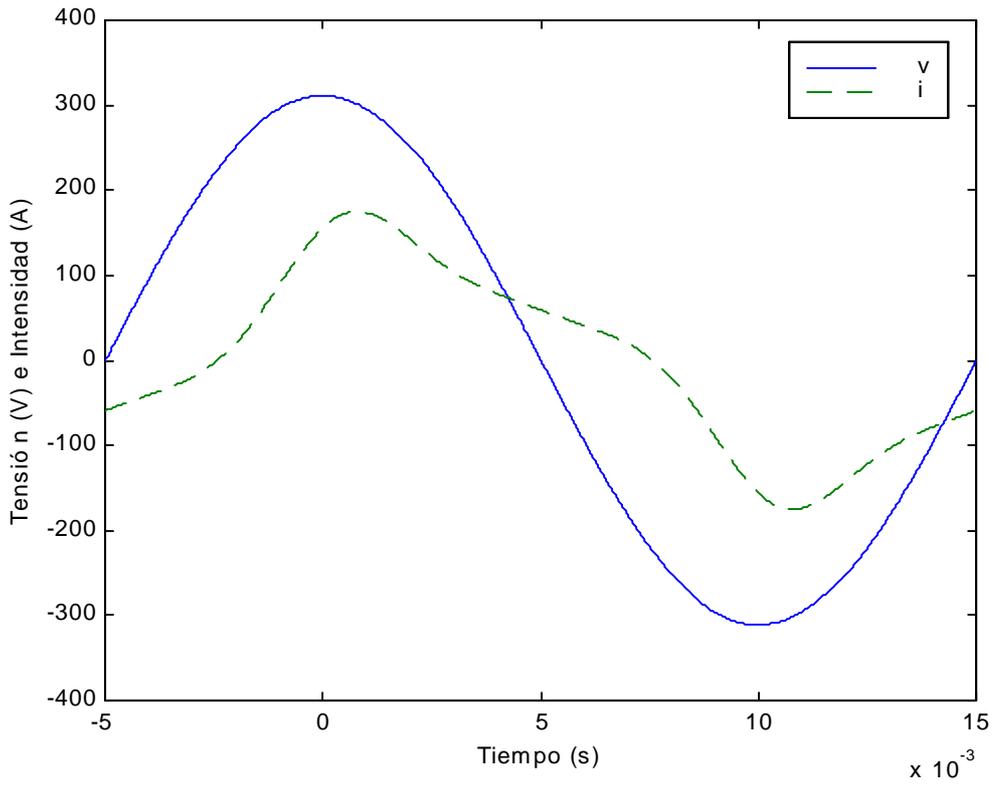


Figura 9

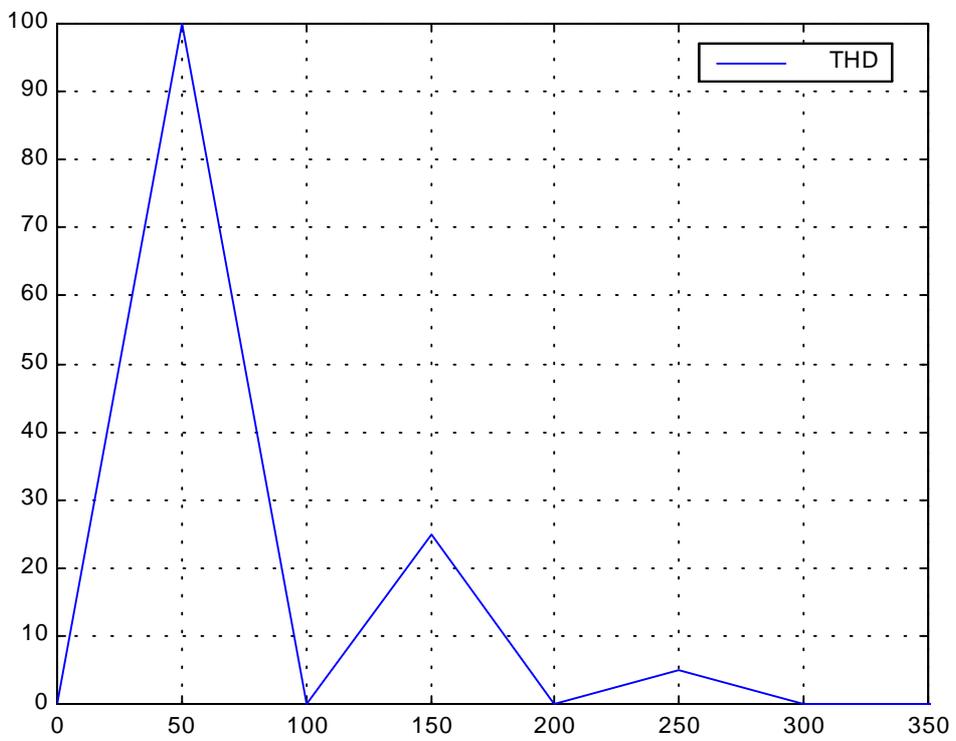


Figura 10

## Circuitos Magnéticos

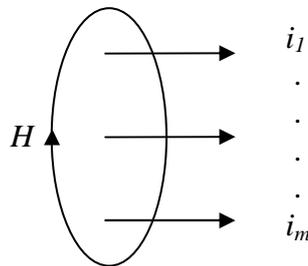
### Circuitos Magnéticos. Generalidades.

Ley de Ampere:

Una corriente que circula por un conductor produce un campo magnético de intensidad  $\vec{H}$  (medido en A/m). De acuerdo con la Ley de Ampere la integral a lo largo de una línea cerrada de la intensidad del campo magnético  $\vec{H}$  es igual a la corriente total encerrada:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2.1)$$

En la siguiente figura se representan  $m$  conductores por los que pasan ciertas corrientes.

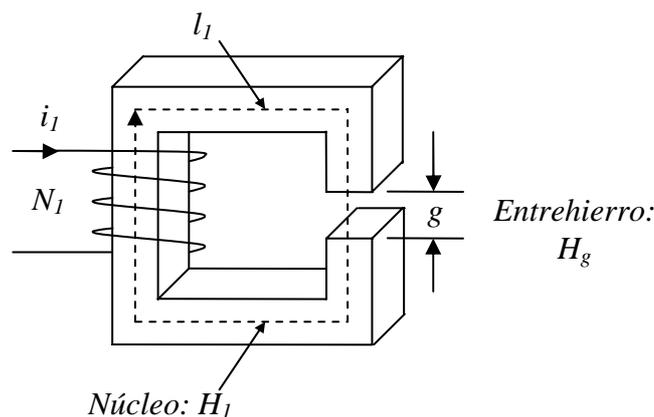


En esta figura se cumple  $\oint H \cdot dl = \sum_m I_m$ .

En circuitos magnéticos reales se acepta como suficientemente aproximado:

$$\sum_k H_k \cdot l_k = \sum_m N_m \cdot I_m \quad (2.2)$$

donde  $l_k$  es la longitud media del circuito magnético  $k$  y  $N_m$  es el número de vueltas del arrollamiento  $m$ .



En el circuito magnético de la figura la ecuación anterior quedaría:

$$H_1 \cdot l_1 + H_g \cdot l_g = N_1 \cdot i_1 \quad (2.3)$$

Ley de Faraday:

Un campo magnético de densidad de flujo  $\vec{B}$  que varía con el tiempo, produce sobre un conductor un campo eléctrico  $\vec{E}$ . La ley de Faraday expresa que la derivada temporal del flujo magnético  $\phi$  es igual a la integral a lo largo de una línea cerrada del campo eléctrico  $\vec{E}$ .

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = + \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.4)$$

Se define flujo magnético como:

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.5)$$

Para un conductor que forme una espira se tiene una expresión aproximada de la Ley de Faraday:

$$e = + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.6)$$

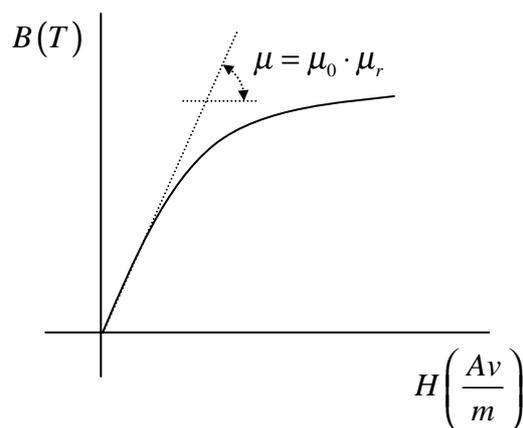
Hay que hacer notar que el flujo  $\phi$  varía con el tiempo si el campo magnético  $\vec{B}$  varía con el tiempo o la superficie sobre la que se integra varía con el tiempo.

Para N espiras se tiene:

$$e = N \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.7)$$

Comportamiento no lineal de los materiales ferromagnéticos:

En la siguiente figura se muestra la característica de un material ferromagnético:



Se representa la relación existente entre el campo magnético  $B$  y la intensidad de campo  $H$ . Se puede apreciar como existe un comportamiento lineal para bajas intensidades de campo magnético. Esta linealidad se expresa en módulo de la siguiente forma:

$$B = \mu \cdot H \quad (2.8)$$

A  $\mu$  se le conoce como permeabilidad absoluta del material. Dicha permeabilidad suele descomponerse como el producto de la permeabilidad del vacío y de la permeabilidad relativa:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad (2.9)$$

Nota: la permeabilidad relativa del aire es igual a la unidad, o lo que es lo mismo, la permeabilidad absoluta del aire es igual a la del vacío ( $\mu_{aire} = \mu_0$ ).

Ley de Hopkinson:

Relaciona la fuerza magnetomotriz  $FMM$  con el flujo magnético  $\phi$ .

Se define la fuerza magnetomotriz producida por un arrollamiento o bobina, como el producto de la intensidad que las recorre por el número de espiras del arrollamiento. Se mide en amperios-vuelta.

$$FMM = N \cdot I \quad (2.10)$$

De la ley de Ampere:  $N \cdot I = H \cdot l$

Material ferromagnético:  $B = \mu \cdot H$

Definición de flujo magnético:  $\phi = B \cdot s$

Con estas tres ecuaciones la fuerza magnetomotriz se puede escribir como:

$$N \cdot I = \frac{B}{\mu} \cdot l = \frac{\phi}{\mu} \cdot \frac{l}{s} = \phi \cdot \mathfrak{R} \quad (2.11)$$

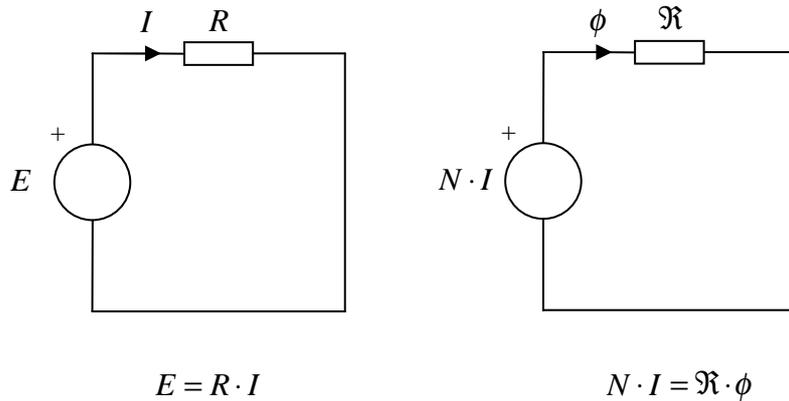
donde  $\mathfrak{R}$  se llama a la reluctancia del circuito magnético y se define como:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{s} \quad (2.12)$$

### Analogía Eléctrica.

A la vista de la definición de la reluctancia  $\mathfrak{R}$ , del flujo  $\phi$ , y de la fuerza magneto motriz  $NI$ , se puede aplicar la analogía eléctrica para la resolución de circuitos magnéticos. Las variables de la analogía se muestran en la siguiente tabla.

Variable Eléctrica	Variable Magnética
Fuerza Electro-Motriz (FEM)	Amperios-Vuelta o Fuerza Magneto-Motriz (FMM)
Intensidad de corriente	Flujo magnético
Resistencia	Reluctancia



Se puede comprobar que las dos leyes de Kirchoff se cumplen también en variables magnéticas:

1ª Ley: En un bucle la suma de fuerzas magnetomotrices es 0.

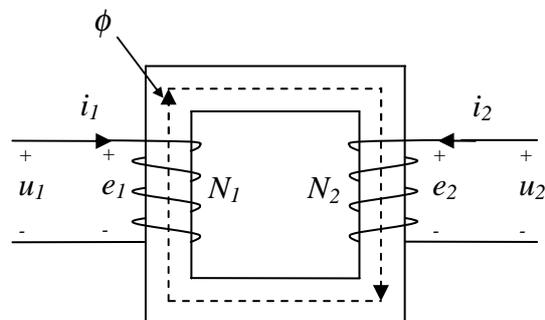
$$\sum_k N_k \cdot I_k = 0 \quad (2.13)$$

2ª Ley: En un nudo la suma de flujos es 0.

$$\sum_j \phi_j = 0 \quad (2.14)$$

### Transformador Ideal.

En la siguiente figura se muestra el esquema de un transformador ideal. Consta de dos arrollamientos de  $N_1$  y  $N_2$  espiras, que abrazan a un mismo núcleo magnético.



Debido a la aplicación de la tensión  $u_1$  en el devanado primario, por el núcleo magnético circula un flujo  $\phi$ .

Las ecuaciones de este transformador ideal son:

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.15)$$

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.16)$$

En general, si la tensión aplicada  $u_1$  es sinusoidal y de valor  $u_1 = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \sin \omega t$ , y teniendo en cuenta que:

$$u_1 \simeq e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.17)$$

Despejando e integrando el flujo  $\phi$ , se puede obtener una expresión del tipo:

$$\phi = \phi_m \cdot \sin(\omega t - \pi/2) \quad (2.18)$$

con lo que:

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \cdot \phi_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \pi) \quad (2.19)$$

En valores eficaces:

$$E_1 = 4.44 \cdot N_1 \cdot B_m \cdot s \cdot f \quad (2.20)$$

Esta última ecuación expresa la tensión eficaz inducida  $E_1$  en función del número de espiras  $N_1$ , la inducción máxima  $B_m$ , la sección del núcleo  $s$  y de la frecuencia  $f$ .

Con este valor eficaz de la tensión inducida, se define la relación de transformación entre espiras  $r_{te}$  como:

$$r_{te} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.21)$$

Se define a su vez la relación de transformación nominal  $r_m$ , o simplemente relación de transformación  $r_t$ , al cociente entre la tensión nominal en el primario y la tensión en el secundario estando el transformador en vacío:

$$r_m = \frac{U_{1n}}{U_{20}} \quad (2.22)$$

La ecuación que nos proporciona la relación entre las corrientes (en valores eficaces) nos viene dada por la segunda ley de Kirchoff igualdad de fuerzas magnetomotrices:

$$N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2 = 0 \quad (2.23)$$

O lo que es lo mismo:

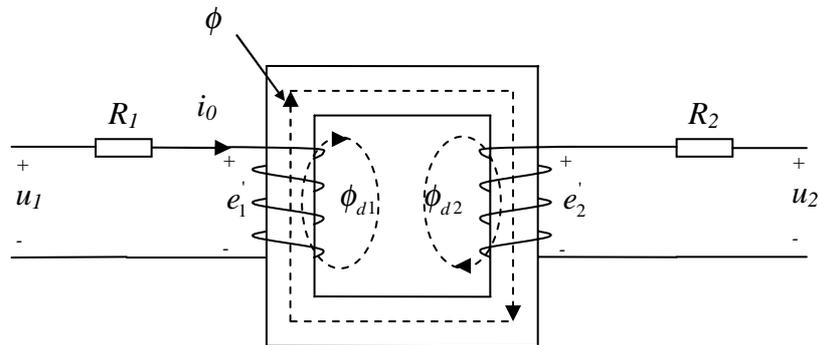
$$-\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.24)$$

El signo menos quiere decir que la corriente  $i_2$  es en el sentido contrario al dibujado en la figura.

## Circuito Equivalente del Transformador Real.

Flujos de dispersión y resistencia de los devanados

En el siguiente esquema se representan las resistencias de los devanados primario y secundario, así como los flujos de dispersión de dichos devanados:



En esta figura, el flujo producido por el devanado primario es:

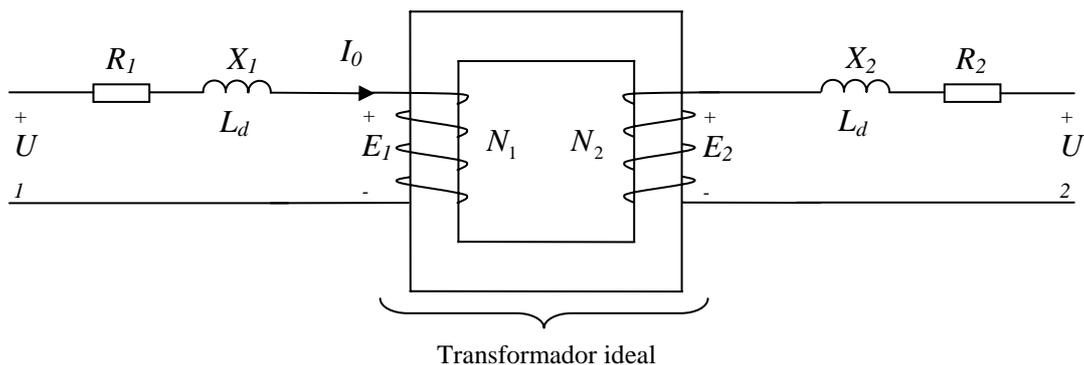
$$\phi_1 = \phi + \phi_{d1} \quad (2.25)$$

Por lo tanto, la tensión inducida será:

$$e_1' = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{d1}}{dt} = e_1 + L_{d1} \cdot i_0 \quad (2.26)$$

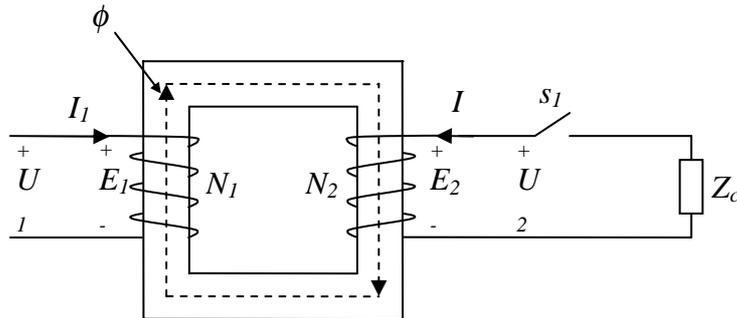
donde el flujo de dispersión se ha aproximado a una inductancia de valor  $L_{d1}$ . Esto es debido al hecho de que la reluctancia del aire es mucho mayor que la del circuito magnético y por lo tanto el circuito magnético que abarca el flujo de dispersión es aproximadamente sólo el del aire ( $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{chapa} + \mathcal{R}_{aire} \approx \mathcal{R}_{aire}$ ).

A continuación se puede observar como queda el modelo del transformador en vacío.



Trafo en carga

En la siguiente figura se representa un transformador al que le aplicamos una carga cerrando el interruptor  $S_1$ .



Cuando el transformador está en vacío, tan sólo circula la corriente  $I_0$ , correspondiente a la corriente de vacío del transformador. Cuando se cierra el interruptor  $S_1$ , circula por el secundario una corriente  $I_2$ . Dado que el flujo apenas variará ya que  $E_1$  es aproximadamente igual a  $U_1$ , por el primario circulará una corriente  $I_1$  para compensar el efecto de la corriente del secundario.

Se verá a continuación la relación existente entre la corriente del secundario y la del primario.

En vacío:

$$N_1 \cdot I_0 = \mathfrak{R} \cdot \phi_{\text{vacío}} \quad (2.27)$$

En carga:

$$N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2 = \mathfrak{R} \cdot \phi_{\text{carga}} \quad (2.28)$$

Dado que  $\phi_{\text{vacío}} \approx \phi_{\text{carga}}$ :

$$N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2 = N_1 \cdot I_0 \quad (2.29)$$

$$I_1 = I_0 - \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_0 + I'_2 \quad (2.30)$$

donde

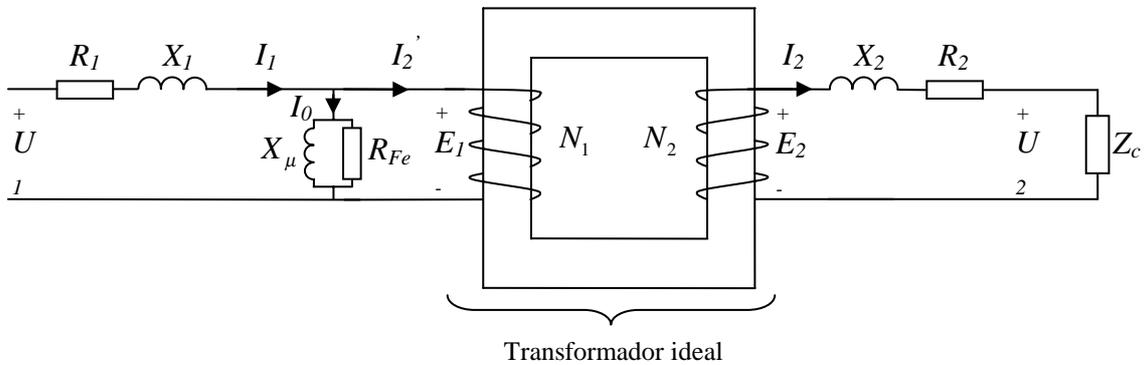
$$I'_2 = -\frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (2.31)$$

Se observa que la corriente por el primario  $I_1$  es igual a la de vacío  $I_0$  más la corriente del secundario expresada en el primario  $I'_2$ .

La corriente de vacío  $I_0$  está siempre presente, esté el transformador en vacío o en carga. De hecho la corriente  $I_0$  es la que aporta el flujo necesario para el transporte de potencia desde el primario al secundario.

Circuito equivalente exacto

En la siguiente figura se muestra el circuito equivalente exacto del transformador. La corriente de vacío se ha tenido en cuenta mediante una reactancia en paralelo  $X_\mu$  que se denomina reactancia de magnetización. También se han tenido en cuenta las pérdidas de histéresis mediante la resistencia  $R_{Fe}$ .



Es usual referir todas las tensiones, corrientes e impedancias del secundario al primario. Las tensiones se pasan mediante la relación de transformación ideal,  $r_t$ , las corrientes con la inversa,  $1/r_t$ , y las impedancias con el cuadrado,  $r_t^2$ . Dichas variables del secundario pasadas al primario se notan con prima.

$$I_2' = \frac{1}{r_{te}} \cdot I_2 \quad (2.32)$$

$$U_2' = r_{te} \cdot U_2 \quad (2.33)$$

$$E_2' = r_{te} \cdot E_2 \quad (2.34)$$

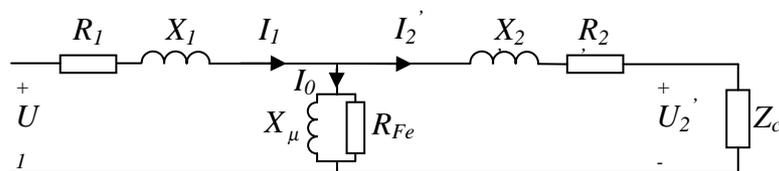
$$X_2' = r_{te}^2 \cdot X_2 \quad (2.35)$$

$$R_2' = r_{te}^2 \cdot R_2 \quad (2.36)$$

$$Z_2' = r_{te}^2 \cdot Z_2 \quad (2.37)$$

Puede comprobarse que  $E_2' = E_1$  por lo que se puede eliminar el transformador ideal.

Con esto el modelo del transformador queda:



## Conceptos Básicos de Máquinas Eléctricas Rotativas. Máquinas Síncronas y Asíncronas.

### Clasificación de la Máquinas Eléctricas Rotativas

Máquina de Inducción (Asíncronas):

- Estator: Inductor. Núcleo Liso.



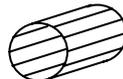
- Rotor: Inducido.

1. Bobinado (o Anillos Rozantes). Núcleo Liso.



Se puede regular la velocidad con reostato en anillos.

2. Jaula de Ardilla. Núcleo Liso.



Dificultad en la regulación de la velocidad.

Velocidad de sincronismo: ( $p$  = número de pares de polos)

$$\Omega_s = \frac{\omega_e}{p} = \frac{2\pi f}{p}$$

Deslizamiento:

$$s = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s}$$

Máquina Síncrona:

- Estator: Inducido. Núcleo Liso.

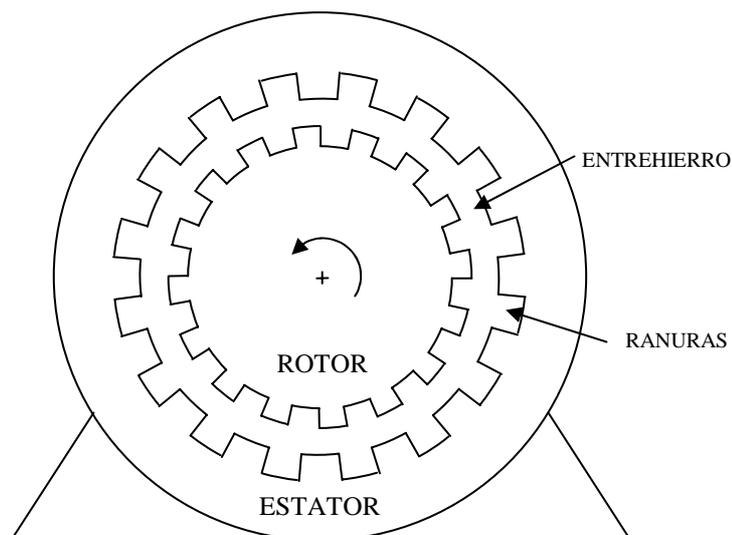


- Rotor: Inductor.

1. Núcleo Polos Salientes. Alternadores Hidráulicos.

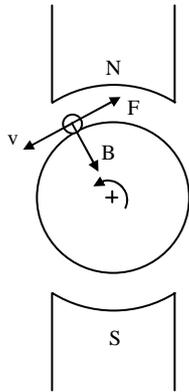


2. Núcleo Liso. Turboalternadores.



Fem y Par

En la siguiente figura se muestra el cálculo de la fuerza electromotriz inducida y del par en un conductor  $e_a$  y  $M_a$ , así como la fem y el par total  $e$  y  $M$ :



$$\vec{e}_a = l \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} \perp \vec{B} \quad e_a = Blv$$

$$\vec{F}_a = l \cdot \vec{i} \times \vec{B} \quad \vec{i} \perp \vec{B}$$

$$F_a = Bil$$

$$\vec{M}_a = \vec{r} \times \vec{F}_a$$

$$M_a = F_a r = Bilr$$

$$e = \sum e_a = \sum Blv$$

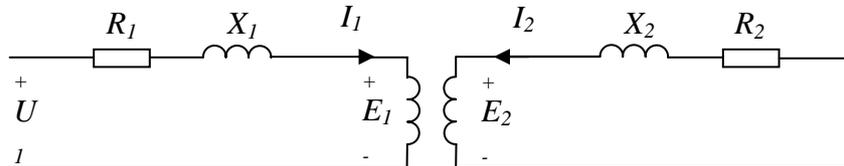
$$M = \sum M_a = \sum Bilr$$

Máquina Asíncrona. Modelo Eléctrico en Régimen Permanente

Las máquinas asíncronas tienen las bobinas dispuestas cada 120° de manera que al aplicarles la tensión trifásica, se produce un campo magnético giratorio. En el rotor se inducen unas fuerzas electromotrices que crean a su vez otro campo giratorio (reacción de inducido). El campo relativo resultante de la superposición de dichos campos produce las corrientes rotóricas necesarias para el movimiento (caso motor) o para la generación de potencia (caso generador).

Rotor Bloqueado:

La máquina asíncrona con el rotor bloqueado es lo mismo que un transformador con el secundario cortocircuitado:



En este circuito, se cumplen las siguientes igualdades:

$$U_1 = E_1 + I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot j \cdot X_1 \quad (2.38)$$

$$0 = E_2 + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot j \cdot X_2 \quad (2.39)$$

Por otro lado, la frecuencia de las corrientes rotóricas es la frecuencia del campo relativo:

$$\omega_{cr} = p \cdot \Omega_{rel} = p \cdot (\Omega_1 - \Omega) = p \cdot \Omega_1 - p \cdot \Omega = \omega_1 - \omega = s \cdot \omega_1 \quad (2.40)$$

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad (2.41)$$

En el caso de rotor bloqueado (s=1):

$$f_2 = f_1 \quad (2.42)$$

Rotor en movimiento:

El movimiento del rotor produce el campo relativo que va a hacer que la frecuencia rotórica sea distinta que la estática. De hecho la tensión inducida  $E_2$  y la reactancia  $X_2$  del secundario no van a ser las mismas. Las denominaremos  $E_{2s}$  y  $X_{2s}$  respectivamente.

La tensión inducida en el caso de máquinas es similar a la de los transformadores:

$$E = 4.44 \cdot \xi_b \cdot f \cdot N \cdot \phi \quad (2.43)$$

donde  $\xi_b$  es el factor de bobinado, que depende de la forma en la que se ha bobinado la máquina.

La relación entre  $E_2$  y  $E_{2s}$  es:

$$E_{2s} = 4.44 \cdot \xi_{b2} \cdot f_2 \cdot N_2 \cdot \phi = 4.44 \cdot \xi_{b2} \cdot s \cdot f_1 \cdot N_2 \cdot \phi = s \cdot E_2 \quad (2.44)$$

A su vez, la relación entre  $X_2$  y  $X_{2s}$  es:

$$X_{2s} = L_{d2} \cdot \omega_{2s} = L_{d2} \cdot 2\pi f_{2s} = s \cdot L_{d2} \cdot 2\pi f_1 = s \cdot L_{d2} \cdot \omega_1 = s \cdot X_2 \quad (2.45)$$

Las ecuaciones del circuito serían:

$$U_1 = E_1 + I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot j \cdot X_1 \quad (2.46)$$

$$0 = E_{2s} + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot j \cdot X_{2s} \quad (2.47)$$

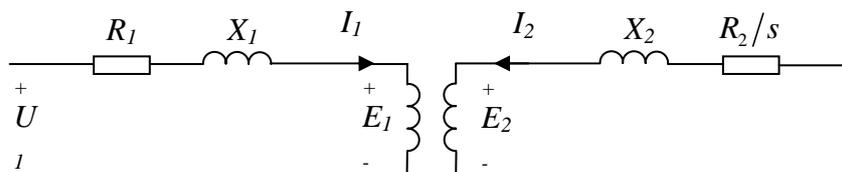
Sustituyendo en esta última ecuación, queda:

$$0 = s \cdot E_2 + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot j \cdot s \cdot X_2 \quad (2.48)$$

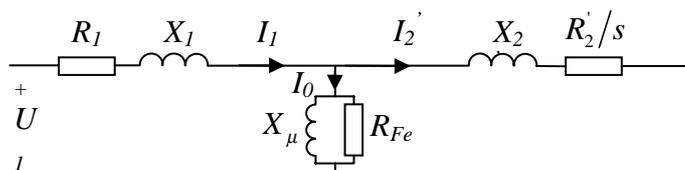
Y finalmente dividiendo por  $s$ :

$$0 = E_2 + I_2 \cdot \frac{R_2}{s} + I_2 \cdot j \cdot X_2 \quad (2.49)$$

El circuito sería por tanto:



Haciendo las mismas consideraciones que se mostraron para el transformador sobre la rama de magnetización, se obtiene el circuito equivalente exacto de la máquina asíncrona:



Característica de Par:

En el circuito anterior con las siguientes definiciones:

$$Z_1 = R_1 + j \cdot X_1 \quad (2.50)$$

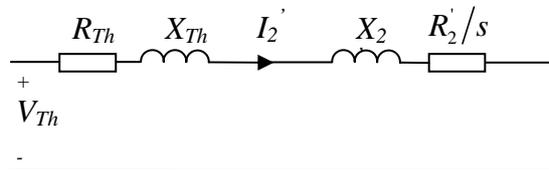
$$Z_e = X_\mu // R_{Fe} \quad (2.51)$$

y realizando el equivalente Thevenin:

$$Z_{Th} = R_{Th} + j \cdot X_{Th} = \frac{Z_1 \cdot Z_e}{Z_1 + Z_e} \quad (2.52)$$

$$V_{Th} = \frac{Z_e}{Z_1 + Z_e} \cdot U_1 \quad (2.53)$$

el circuito queda:



La potencia disipada en la resistencia  $R_2'/s$  es la potencia que va a mover a la máquina en caso de motor, o la potencia que se va a generar en caso de generador.

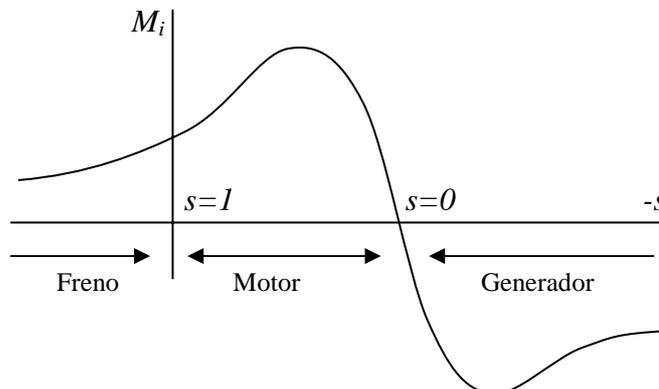
La corriente rotórica  $I_2'$  es igual a:

$$I_2' = \frac{V_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + R_2'/s)^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} \quad (2.54)$$

Finalmente el Par producido en la máquina será igual al número de fases del rotor por el par producido en cada fase:

$$M_i = 3 \cdot \frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{R_2'}{s} \cdot (I_2')^2 = \frac{3 \cdot V_{Th}^2 \cdot R_2'/s}{\Omega_1 \cdot [(R_{Th} + R_2'/s)^2 + (X_{Th} + X_2')^2]} \quad (2.55)$$

La característica par velocidad se muestra en la siguiente figura:

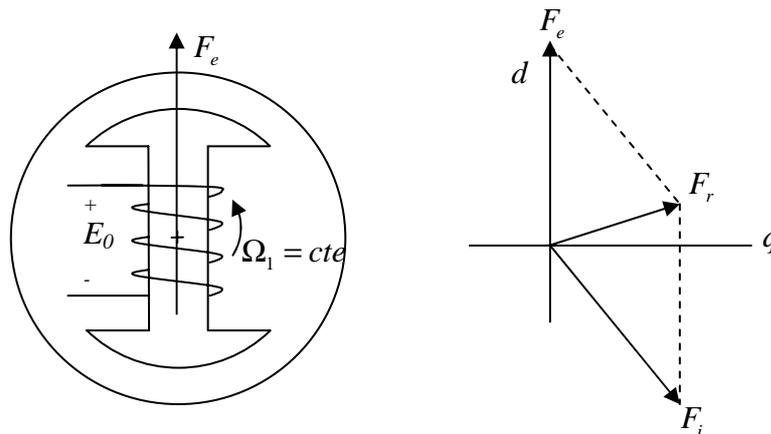


## Máquina Síncrona. Modelo Eléctrico en Régimen Permanente

Las máquinas síncronas deben su nombre a que siempre giran a la velocidad impuesta por la frecuencia de la red a la que se conectan.

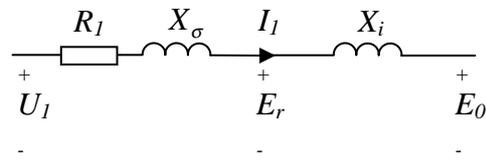
El devanado inductor está compuesto por una serie de bobinas que se alimentan con corriente continua formando lo que se denomina el sistema de excitación.

Dicho sistema de excitación produce una fuerza magnetomotriz  $F_e$  que gira con el rotor. En el estator se inducirán unas corrientes senoidales que a su vez producen una fuerza magnetomotriz  $F_i$ , que se denomina reacción de inducido. La frecuencia de  $F_i$  viene impuesta por la frecuencia de la red a la que está conectado el estator (ley de Faraday). La resultante de las fuerzas magnetomotrices  $F_r$  es la que produce el par que en un generador es par resistente (y al contrario en un motor).



Máquina de rotor liso:

El circuito equivalente es el que se muestra en la siguiente figura:



donde  $E_r$  es la fem resultante inducida en el estator.

A la suma de  $X_\sigma$  y  $X_i$  se suele denominar reactancia síncrona  $X_s$ .

Despreciando la resistencia  $R_l$ , la potencia activa y reactiva son:

$$P = 3 \cdot \frac{E_0 \cdot U_1}{X_s} \cdot \sin \theta \quad (2.56)$$

$$Q = 3 \cdot \frac{E_0 \cdot U_1}{X_s} \cdot \cos \theta - 3 \cdot \frac{U_1^2}{X_s} \quad (2.57)$$

siendo  $\theta$  el ángulo que forman  $U_1$  y  $E_0$ .

El par será:

$$M = 3 \cdot \frac{E_0 \cdot U_1}{\Omega_1 \cdot X_s} \cdot \sin \theta \quad (2.58)$$

Máquina de Polos Salientes:

Normalmente para el análisis de la potencia la reactancia  $X_i$  y demás magnitudes se suelen descomponer en ejes d-q, de manera que:

$$E_r = E_d + E_q + E_0 \quad (2.59)$$

$$E_d = -I_d \cdot j \cdot X_d \quad (2.60)$$

$$E_q = -I_q \cdot j \cdot X_q \quad (2.61)$$

Así, la potencia activa y reactiva tienen las siguientes expresiones:

$$P = 3 \cdot \frac{E_0 \cdot U_1}{X_d} \cdot \sin \theta + 3 \cdot \frac{U_1^2 \cdot (X_d - X_q)}{2 \cdot X_d \cdot X_q} \cdot \sin(2\theta) \quad (2.62)$$

$$Q = 3 \cdot \frac{E_0 \cdot U_1}{X_d} \cdot \sin \theta - 3 \cdot \frac{U_1^2}{X_d} \cdot \cos^2 \theta - 3 \cdot \frac{U_1^2}{X_q} \cdot \sin^2 \theta \quad (2.63)$$

Se puede observar que tanto la potencia activa como la reactiva dependen de la excitación  $E_0$ .

El par será:

$$M = 3 \cdot \frac{E_0 \cdot U_1}{\Omega_1 \cdot X_d} \cdot \sin \theta + 3 \cdot \frac{U_1^2 \cdot (X_d - X_q)}{2 \cdot \Omega_1 \cdot X_d \cdot X_q} \cdot \sin(2\theta) \quad (2.64)$$

Característica de par

Dado que la velocidad es constante la característica de par es una línea vertical sobre la frecuencia de sincronismo. El par máximo está limitado por la potencia máxima para la que se ha diseñado la máquina. En la siguiente figura se muestra dicha característica.

